

Marin Chirciu

INEGALITĂȚI GEOMETRICE 2

DE LA INIȚIERE LA PERFORMANȚĂ



Editura Paralela 45

Cuprins

	Soluții
Identități remarcabile în triunghi	7
Inegalități remarcabile în triunghi	27
Capitolul 1 – Metoda SOS	30 115
Capitolul 2 – Substituțiile lui Ravi	36 130
Capitolul 3 – Inegalitatea lui Bergström; Cauchy–Buniakovski–Schwarz.....	39 138
Capitolul 4 – Inegalitatea lui Hölder	53 165
Capitolul 5 – Inegalitățile lui Mitrinovič	58 174
Capitolul 6 – Inegalitatea lui Cebîșev	67 198
Capitolul 7 – Convexitate. Inegalitatea lui Jensen. Inegalitatea lui Popoviciu	72 214
Capitolul 8 – Inegalitatea lui Gerretsen, Inegalitatea Blundon–Gerretsen..	81 226
Capitolul 9 – Inegalități geometrice obținute din inegalități algebrice	91 251
Capitolul 10 – Inegalitatea mediilor	107 276
<i>Bibliografie</i>	303

„Când apare un om deștept pe lume, poți să-l recunoști după faptul că toți proștii îl urăsc.”

Bisanne de Soleil

Sunt adevărate afirmațiile:

$$a^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}, \text{ cu egalitate pentru } a = 0.$$

$$(a-b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ cu egalitate pentru } a = b.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca), \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}, \text{ cu egalitate pentru } \Delta = 0 \text{ și } x = \frac{-b}{2a}.$$

$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow (x-a)(x-b) \leq 0, \text{ cu egalitate dacă } x = a \text{ sau } x = b.$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc, \forall a, b, c \geq 0, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c, \forall a, b, c > 0 \text{ și } abc = 1, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c = 1.$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9, \forall a, b, c > 0, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

În continuare sunt propuse aplicații ce pot fi rezolvate folosind inegalitățile de mai sus.

Să se arate că în orice triunghi ABC sunt adevărate inegalitățile:

$$1.1. \text{ a) } \sum |3a^2 - 2b^2| \cdot m_a \geq \frac{8S^2}{R}.$$

Mathematical Reflections, Titu Andreescu, Dallas, SUA

$$\text{b) } \sum |2a^2 - b^2| \cdot m_a \geq \frac{8S^2}{R}.$$

- c) $\sum |(n+1)a^2 - nb^2| \cdot m_a \geq 4(n+2) \cdot \frac{S^2}{R} \geq \frac{8S^2}{R}$, unde $0 \leq n \leq 2$.
- d) $\sum |xa^2 - yb^2| \cdot m_a \geq |x-y| \cdot \frac{8S^2}{R}$, unde $2x \geq 3y \geq 0$.
- e) $\sum |3a^2 - 2b^2| \cdot (m_b + m_c) \geq \frac{16S^2}{R}$.
- f) $\sum |2a^2 - b^2| \cdot (m_b + m_c) \geq \frac{16S^2}{R}$.
- g) $\sum |(n+1)a^2 - nb^2| \cdot (m_b + m_c) \geq \frac{16S^2}{R}$, unde $-2 \leq n \leq 2$.
- h) $\sum |xa^2 - yb^2| \cdot (m_b + m_c) \geq |x-y| \cdot \frac{16S^2}{R}$, unde $2x \geq 3y \geq 0$.
- i) $\sum |3a^2 - 2b^2| \cdot (m_b + \lambda m_c) \geq (1+\lambda) \frac{8S^2}{R}$, unde $\lambda \geq 1$.
- j) $\sum |2a^2 - b^2| \cdot (m_b + \lambda m_c) \geq (1+\lambda) \frac{8S^2}{R}$, unde $\lambda \geq 0$.
- k) $\sum |(n+1)a^2 - nb^2| \cdot (m_b + \lambda m_c) \geq (1+\lambda) \frac{8S^2}{R}$, unde $-2 \leq n \leq 2$ și $\lambda \geq n - 1$.
- l) $\sum |xa^2 - yb^2| \cdot (m_b + \lambda m_c) \geq |x-y| \cdot (1+n) \frac{8S^2}{R}$, unde $(1+\lambda)x \geq (2+\lambda)y \geq 0$ și $\lambda \geq 0$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

1.2.
$$\frac{1}{(\cos A + \cos B)^2} + \frac{1}{(\cos B + \cos C)^2} + \frac{1}{(\cos C + \cos A)^2} \geq 3.$$

D.M. Băținețu-Giurgiu și Neculai Stanciu

1.3. a)
$$\frac{m_a + m_b + m_c}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} \geq 4r.$$

George Apostolopoulos, Messolonghi, Grecia

b)
$$\frac{m_a + m_b + m_c}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} \geq 2R \geq 4r.$$

1.4. a)
$$\frac{a(b+c)}{bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{b(c+a)}{ca \cdot \cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{c(a+b)}{ab \cdot \cos^2 \frac{C}{2}} \geq 8.$$

Daniel Sitaru

b)
$$\frac{a(b+c)}{bc \cdot \sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{b(c+a)}{ca \cdot \sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{c(a+b)}{ab \cdot \sin^2 \frac{C}{2}} \geq 12.$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \frac{a(b+c)}{bc \cdot \sin^2 A} + \frac{b(c+a)}{ca \cdot \sin^2 B} + \frac{c(a+b)}{ab \cdot \sin^2 C} \geq 8. \\ \text{d)} \quad & \frac{a(b+c)}{bc \cdot \sin A} + \frac{b(c+a)}{ca \cdot \sin B} + \frac{c(a+b)}{ab \cdot \sin C} \geq 4\sqrt{3}. \\ \text{e)} \quad & \frac{a(b+c)}{bc \cdot \sin^3 A} + \frac{b(c+a)}{ca \cdot \sin^3 B} + \frac{c(a+b)}{ab \cdot \sin^3 C} \geq \frac{16}{\sqrt{3}}. \\ \text{f)} \quad & \frac{a(b+c)}{bc \cdot \sin^4 A} + \frac{b(c+a)}{ca \cdot \sin^4 B} + \frac{c(a+b)}{ab \cdot \sin^4 C} \geq \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

$$1.5. \text{ a) } \sum \frac{b^4 + c^4}{\text{tg}^2 \frac{B}{2} + \text{tg}^2 \frac{C}{2}} \geq 48S^2. \quad \text{George Apostolopoulos, Messolonghi, Grecia}$$

$$\text{b) } \sum \frac{b^4 + nc^4}{\text{tg}^2 \frac{B}{2} + n \text{tg}^2 \frac{C}{2}} \geq 48S^2, \text{ unde } n \geq 0.$$

$$1.6. \frac{9R}{8S} - \sum \frac{1}{a+b} \geq \sum \frac{(a-b)^2}{2(p-a)(p-b)(a+b+2c)}.$$

Neculai Stanciu, Buzău și Titu Zvonaru, Comănești

1.7. Arătați că în orice triunghi ascuțitunghic au loc următoarele relații:

$$\text{a) } \frac{a^2}{\text{tg} B + \text{tg} C} + \frac{b^2}{\text{tg} C + \text{tg} A} + \frac{c^2}{\text{tg} A + \text{tg} B} \leq pR.$$

Daniel Sitaru

$$\text{b) } \frac{a^2}{\text{ctg} B + \text{ctg} C} + \frac{b^2}{\text{ctg} C + \text{ctg} A} + \frac{c^2}{\text{ctg} A + \text{ctg} B} \leq 3pR.$$

$$\text{c) } \sum \frac{a^2 \cos(B-C)}{\sin A} \leq 4pR.$$

$$1.8. \frac{3}{64} \prod \left(1 + \text{ctg}^2 \frac{A}{2} \right) + 3 \geq \sum \frac{\sec \frac{A}{2} + \text{tg} \frac{A}{2}}{\sin A}. \quad \text{Kevin Soto Palacios, Huarmey, Peru}$$

$$1.9. \text{ a) } \sum m_a^2 r_a = p^2 (R + 4r) - r(4R + r)^2.$$

$$\text{b) } \frac{m_a^2}{r_b r_c} + \frac{m_b^2}{r_c r_a} + \frac{m_c^2}{r_a r_b} = \frac{p^2 (R + 4r) - r(4R + r)^2}{rp^2}.$$

$$1.10. \frac{r_a}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{r_b}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{r_c}{\sin \frac{C}{2}} \geq 2\sqrt{3}s.$$

Hoang Le Nhat Tung, Hanoi, Vietnam

1.11. a) $\frac{1}{\sqrt{r_a}} + \frac{1}{\sqrt{r_b}} + \frac{1}{\sqrt{r_c}} + \frac{1}{\sqrt{r}} > \sqrt{\frac{2}{h_a}} + \sqrt{\frac{2}{h_b}} + \sqrt{\frac{2}{h_c}}.$

Nguyen Viet Hung, Hanoi, Vietnam

b) $\frac{1}{\sqrt{r_a}} + \frac{1}{\sqrt{r_b}} + \frac{1}{\sqrt{r_c}} \leq \frac{1}{\sqrt{h_a}} + \frac{1}{\sqrt{h_b}} + \frac{1}{\sqrt{h_c}}.$

c) $\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} \geq \frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}.$

d) $\frac{1}{r_a^3} + \frac{1}{r_b^3} + \frac{1}{r_c^3} \geq \frac{1}{h_a^3} + \frac{1}{h_b^3} + \frac{1}{h_c^3}.$

e) $\frac{1}{r_a^4} + \frac{1}{r_b^4} + \frac{1}{r_c^4} \geq \frac{1}{h_a^4} + \frac{1}{h_b^4} + \frac{1}{h_c^4}.$

f) $\frac{1}{r_a^n} + \frac{1}{r_b^n} + \frac{1}{r_c^n} \geq \frac{1}{h_a^n} + \frac{1}{h_b^n} + \frac{1}{h_c^n}, n \in \mathbb{N}.$

1.12. a) $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = p^6 + p^4(3r^2 - 12Rr) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3.$

b) $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq 16r^3(68R^3 - 69R^2r + 30Rr^2 - 4r^3).$

c) $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq 648R^3r^3.$ *Seyran Ibrahimov, Maasilli, Azerbaidjan*

1.13. a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există un triunghi ABC având lungimile

laturilor $c = AB = \sqrt{2x^2 - 2x + 3}$, $b = AC = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$, $a = BC = \sqrt{8x^2 + 10}$.

b) Aria triunghiului ABC este un număr irațional care nu depinde de x .

Iuliana Trașcă, Scornicești

c) Arătați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există un triunghi ABC având lungimile laturilor

$c = AB = \sqrt{\alpha x^2 - \alpha x + \beta}$, $b = AC = \sqrt{\alpha x^2 + \alpha x + \beta}$, $a = BC = \sqrt{4\alpha x^2 + \gamma}$, unde $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\alpha + \gamma = 4\beta$ și $\alpha < 4\gamma$.

d) Aria triunghiului ABC nu depinde de x .

Marin Chirciu

1.14. $\sum \sin A \sin B \cos C \leq \frac{9}{8}$, în triunghiul ascuțitunghic.

Neculai Stanciu, Buzău și Titu Zvonaru, Comănești

1.15. a) $\sum \frac{a}{r_b^2 + r_c^2} \leq \frac{2R - r}{S}.$

Mehmet Şahin, Ankara, Turcia

b) $\sum \frac{a}{h_b^2 + h_c^2} \leq \frac{3R}{2S}.$

c) $\sum \frac{a}{h_b h_c} \leq \sum \frac{a}{r_b r_c}.$

1.16. a) $4 \sum m_b m_c - 4R \sum \frac{h_b h_c}{h_a} \leq p^2 + r(4R + r).$

Bogdan Fuștei, România

b) $4 \sum m_b m_c - 4r \sum \frac{r_b r_c}{r_a} \leq p^2 + 5r(4R + r).$

1.17. a) $\sum m_a \leq 6Rr \sum \frac{r_a}{bc}.$

b) $\frac{3}{2R} \leq \sum \frac{r_a}{bc} \leq \frac{3R}{8r^2}.$

$$c) \sum m_a \leq 3R^2 \sum \frac{h_a}{bc}.$$

$$d) \frac{3}{2R} \leq \sum \frac{h_a}{bc} \leq \frac{3}{4r}.$$

$$e) \sum \frac{h_a}{bc} \leq \sum \frac{r_a}{bc}.$$

$$f) \frac{3}{2R} \leq \sum \frac{h_a}{bc} \leq \sum \frac{r_a}{bc} \leq \frac{3R}{8r^2}.$$

$$1.18. 4(l_a^2 + l_b^2 + l_c^2) \leq (a+b+c)^2.$$

Nguyen Viet Hung, Hanoi, Vietnam

$$1.19. a) \frac{AI \cdot h_a}{w_a(r_a + h_a)} + \frac{BI \cdot h_b}{w_b(r_b + h_b)} + \frac{CI \cdot h_c}{w_c(r_c + h_c)} = 1. \quad \text{Mustafa Tarek, Cairo, Egipt}$$

$$b) \frac{w_a(r_a + h_a)}{AI \cdot h_a} + \frac{w_b(r_b + h_b)}{BI \cdot h_b} + \frac{w_c(r_c + h_c)}{CI \cdot h_c} \geq 9. \quad \text{Mustafa Tarek, Cairo, Egipt}$$

$$c) \frac{w_a(r_a + h_a)}{AI \cdot h_a} + \frac{w_b(r_b + h_b)}{BI \cdot h_b} + \frac{w_c(r_c + h_c)}{CI \cdot h_c} = 1 + \frac{4R}{r}.$$

$$d) \frac{w_a(r_a + h_a)}{AI \cdot h_a} + \frac{w_b(r_b + h_b)}{BI \cdot h_b} + \frac{w_c(r_c + h_c)}{CI \cdot h_c} \leq \frac{9R}{2r}.$$

$$e) 9 \leq \frac{w_a(r_a + h_a)}{AI \cdot h_a} + \frac{w_b(r_b + h_b)}{BI \cdot h_b} + \frac{w_c(r_c + h_c)}{CI \cdot h_c} \leq \frac{9R}{2r}.$$

$$1.20. a) \sum \frac{1}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}} = \frac{p^2 + (4R+r)^2}{4Rp}. \quad b) \sum \frac{1}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rp}.$$

$$c) \sum \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}} - \frac{1}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}} \right) \geq \sqrt{3}. \quad \text{Daniel Sitaru}$$

$$d) \sum \frac{1}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rr}. \quad e) \sum \frac{1}{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} - 1} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4Rr}.$$

$$f) \sum \left(\frac{1}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} + \frac{1}{1 - \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2}} \right) = 3.$$

$$1.21. (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

Florentin Vișescu

$$1.22. l_a \leq 2R \cos^2 \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \leq m_a.$$

$$1.23. a) \frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \leq 2\sqrt{3} \left(\frac{R}{2r} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

George Apostolopoulos, Grecia

capitolul

2

Substituțiile lui Ravi

„Unica lecție pe care o învățăm la istorie este
că nimeni nu învață nicio lecție din istorie.”
George Bernard Shaw

Propoziție

Numerele a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi dacă și numai dacă există $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $a = y + z, b = z + x, c = x + y$. (Substituțiile lui Ravi)

Demonstrație

Necesitate: Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci:

$$b + c - a > 0, c + a - b > 0, a + b - c > 0 \text{ și } x = \frac{b + c - a}{2}, y = \frac{c + a - b}{2}, z = \frac{a + b - c}{2}$$

verifică $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $a = y + z, b = z + x, c = x + y$.

Suficiență: Dacă $a = y + z, b = z + x, c = x + y$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, rezultă că $a, b, c > 0$ și $a + b > c, b + c > a, c + a > b$, deci a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi.

În concluzie, dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci pentru orice inegalitate de forma $F(a, b, c, p, R, r, S) \geq 0$ există inegalitatea duală $F'(x, y, z) \geq 0$,

$$\text{unde } x = p - a, y = p - b, z = p - c, R = \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{4\sqrt{xyz(x + y + z)}}, r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}},$$

$S = \sqrt{xyz(x + y + z)}$. Și, reciproc, pentru orice inegalitate de forma $G(x, y, z) \geq 0$ există inegalitatea duală $G'(a, b, c, p, R, r, S) \geq 0$, unde p, R, r, S reprezintă semiperimetrul, raza cercului circumscris, raza cercului înscris și, respectiv, aria triunghiului cu laturile de lungimi a, b, c și $a = y + z, b = z + x, c = x + y$.

În continuare sunt propuse aplicații ale metodei duale.

Să se arate că în orice triunghi au loc inegalitățile:

$$2.1. \prod(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}) \geq \sqrt{\prod(b + c - a)}.$$

Lucian Stamate, București

2.2. a) $\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} \geq 3 \left(\sqrt[3]{\frac{4R}{r}} - 1 \right).$

b) $\frac{r_a^2}{r_b^2} + \frac{r_b^2}{r_c^2} + \frac{r_c^2}{r_a^2} + \frac{8r}{R} \geq 7.$

RMM 8/2019, Rahim Shahbazov

c) $\frac{r_a^2}{r_b^2} + \frac{r_b^2}{r_c^2} + \frac{r_c^2}{r_a^2} + \frac{2nr}{R} \geq n + 3, \text{ unde } n \leq 4.$

d) $\frac{r_a^3}{r_b^3} + \frac{r_b^3}{r_c^3} + \frac{r_c^3}{r_a^3} + \frac{2nr}{R} \geq n + 3, \text{ unde } n \leq 6.$

e) $\left(\frac{r_a}{r_b}\right)^4 + \left(\frac{r_b}{r_c}\right)^4 + \left(\frac{r_c}{r_a}\right)^4 + \frac{2nr}{R} \geq n + 3, \text{ unde } n \leq 8.$

f) $\left(\frac{r_a}{r_b}\right)^5 + \left(\frac{r_b}{r_c}\right)^5 + \left(\frac{r_c}{r_a}\right)^5 + \frac{2nr}{R} \geq n + 3, \text{ unde } n \leq 10.$

g) $\frac{r_a^3}{r_b^3} + \frac{r_b^3}{r_c^3} + \frac{r_c^3}{r_a^3} + \frac{54r}{4R+r} \geq 9.$

RMM 8/2019, Rahim Shahbazov

h) $\frac{r_a^3}{r_b^3} + \frac{r_b^3}{r_c^3} + \frac{r_c^3}{r_a^3} + \frac{9nr}{4R+r} \geq n + 3, \text{ unde } n \leq \frac{27}{4}.$

i) $\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{2(4R+r)^2}{3p^2} - 1}.$

j) $\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} \geq \sqrt[3]{\frac{n(4R+r)^2}{p^2} + 27 - 3n}, \text{ unde } 0 \leq n \leq 27.$

k) $\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} + \frac{4r}{R} \geq 5.$

RMM 8/2019, Rahim Shahbazov

l) $\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} + \frac{2nr}{R} \geq n + 3, \text{ unde } n \leq 2.$

m) $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} \geq 3 \left(\sqrt[3]{9 - \frac{2r}{R}} - 1 \right).$

n) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \left(\sqrt[3]{9 - \frac{2r}{R}} - 1 \right).$

o) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{4R^2 + 2r^2}{3Rr}.$

p) $\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{7}{3}.$

r) $5 - \frac{4r}{R} \leq \frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{7}{3}.$

s) $3 + \frac{r(R-2r)}{8R^2} \leq \frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{R}{r} + 1 \right)^2.$

2.3. Fie $x, y, z > 0$. Arătați că:

$$a) \frac{(x+y)^2 (y+z)^2 (z+x)^2}{(x+y+z)^3} \geq \frac{64}{27} xyz.$$

Jalil Hajimir, Toronto, Canada

$$b) \left[\frac{3(x+y)(y+z)(z+x)}{8(x+y+z)} \right]^3 \geq (xyz)^2.$$

2.4. a) $h_a + h_b + h_c \leq r_a + r_b + r_c$.

$$b) p\sqrt{3} \leq r_a + r_b + r_c \leq \frac{p^2}{3r}.$$

GM 11/1971, Al. Popescu-Zorica, OIM 1971, SHL

$$2.5. \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leq 2 \frac{\sqrt{r_a^2+r_b^2+r_c^2}}{r_a+r_b+r_c-3r}.$$

JBMO TST 2012, Turcia

$$2.6. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{r}{R} \leq 2.$$

$$2.7. \frac{1}{p(p-a)} + \frac{1}{p(p-b)} + \frac{1}{p(p-c)} \leq \frac{ab+bc+ca}{4S^2}.$$

100 Problems

$$2.8. \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}.$$

$$2.9. a) \frac{b+c-a}{\sqrt{a}} + \frac{c+a-b}{\sqrt{b}} + \frac{a+b-c}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{3(a+b+c)}.$$

$$b) \frac{b+c-a}{\sqrt{a+c}} + \frac{c+a-b}{\sqrt{b+a}} + \frac{a+b-c}{\sqrt{c+b}} \geq \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}}.$$

$$c) \frac{b+c-a}{\sqrt{a+2c}} + \frac{c+a-b}{\sqrt{b+2a}} + \frac{a+b-c}{\sqrt{c+2b}} \geq \sqrt{a+b+c}.$$

RMT 4/2014, Andi Gabriel Brojbeanu, Târgoviște

$$d) \frac{b+c-a}{\sqrt{a+nc}} + \frac{c+a-b}{\sqrt{b+na}} + \frac{a+b-c}{\sqrt{c+nb}} \geq \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{n+1}}, \text{ unde } 0 \leq n \leq 2.$$

Dezvoltare, Marin Chirciu

$$e) \sqrt{\frac{a}{b+c-a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a-b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \leq 1 + \frac{R}{r}.$$

V. Nicula, 2014

capitolul

3

Inegalitatea lui Bergström; Cauchy–Buniakovski–Schwarz

„Cea mai distrugătoare explozie este
explozia de entuziasm la un prost.”

Inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwarz

Dacă a_1, a_2, \dots, a_n și b_1, b_2, \dots, b_n sunt numere reale, atunci are loc inegalitatea:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $b_1 = \lambda a_1, b_2 = \lambda a_2, \dots, b_n = \lambda a_n$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$.

Corolar

i) Dacă a, b, x, y sunt numere reale și $x, y > 0$, atunci:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}, \text{ cu egalitate dacă și numai dacă } \frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$$

ii) Dacă a, b, c, x, y, z sunt numere reale și $x, y, z > 0$, atunci:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \text{ cu egalitate dacă și numai dacă } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

iii) Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt numere reale și $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, atunci:

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n},$$

cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \dots = \frac{a_n}{x_n}$.

Corolarul este *inegalitatea lui Bergström*.

În continuare sunt propuse aplicații ce pot fi rezolvate folosind inegalitățile de mai sus.

$$3.1. \text{ a) } \sum h_a^m \cdot \sqrt{r_b + r_c} \leq \sqrt{2 \left(1 + \frac{R}{r}\right) (h_a^{2m+1} + h_b^{2m+1} + h_c^{2m+1})}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b) } \sum r_a^m \cdot \sqrt{a(b+c)} \leq \sqrt{12R(r_a^{2m+1} + r_b^{2m+1} + r_c^{2m+1})}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{c) } \sum h_a^m \cdot \sqrt{h_b + h_c} \leq \sqrt{\frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}} \cdot \sum h_a^{2m+1}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{d) } \sum h_a^m \cdot \sqrt{a(b+c)} \leq \sqrt{\frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{r}} \cdot (h_a^{2m+1} + h_b^{2m+1} + h_c^{2m+1}), \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{e) } \sum h_a^m \cdot \sqrt{b+c} \leq \sqrt{\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{rp}} \cdot \sum h_a^{2m+1}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{f) } \sum a^m \cdot \sqrt{b+c} \leq \sqrt{\frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}} \cdot \sum a^{2m+1}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{g) } \sum \left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\right)^m \cdot \sqrt{\sin \frac{A}{2}} \leq \sqrt{2} \cdot \sum \left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\right)^{2m+1}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{h) } \sum (r_b r_c)^m \cdot \sqrt{h_a(r_b + r_c)} \leq \sqrt{6} \cdot \sum (r_b r_c)^{2m+1}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

$$3.2. \text{ a) } \sqrt{bc(p-a)} + \sqrt{ca(p-b)} + \sqrt{ab(p-c)} \leq 3R\sqrt{p}.$$

Gh. Szollosy, Sighetu Marmăției

$$\text{b) } \sqrt{bc(p-a)} + \sqrt{ca(p-b)} + \sqrt{ab(p-c)} \leq 2(R+r)\sqrt{p}.$$

$$3.3. \text{ a) } a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq 3R\sqrt{2p}.$$

Daniel Sitaru

$$\text{b) } a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq 2(R+r)\sqrt{2p}.$$

$$\text{c) } a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq 2(R+r)\sqrt{2p} \leq 3R\sqrt{2p}.$$

$$\text{d) } a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \leq 4(R+r)\sqrt{p} \leq 6R\sqrt{p}.$$

$$\text{e) } \sum a\sqrt{b+nc} \leq 2(R+r)\sqrt{2(n+1)p} \leq 3R\sqrt{2(n+1)p}, \text{ unde } n \geq 0.$$

$$3.4. \text{ a) } \sum \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = 2 \left(\frac{2R}{r} - 1 \right).$$

$$\text{b) } 6 \leq \sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \leq 2 \left(\frac{R}{r} + 1 \right).$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{4R}{r} + 10} \leq \sum \sqrt{\frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}} \leq \sqrt{\frac{8R}{r} + 2}.$$

$$3.5. \text{ a) } \sum \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{2(4R+r)}{p}.$$

$$\text{b) } \frac{18r}{p} \leq \sum \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} \leq \frac{2p}{3r}.$$

$$\text{c) } \frac{18r}{\sqrt{6S}} \leq \sum \sqrt{\frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}} \leq \frac{9R}{\sqrt{6S}}.$$

$$3.6. \text{ a) } \sum \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}} = \frac{p}{r} \left[\left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 - 2 \right].$$

$$\text{b) } \prod \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p}{r}.$$

$$\text{c) } \frac{1}{r} \sqrt{3S} \leq \sum \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}}} \leq \frac{1}{r} \sqrt{p(R+r)}.$$

$$3.7. \text{ a) } \sum \frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{pr}.$$

$$\text{b) } \prod \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p}.$$

$$\text{c) } 3^4 \leq \sum \sqrt{\frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}} \leq 3^4 \cdot \sqrt{\frac{3R}{2r}}.$$

$$3.8. \text{ a) } \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} + \frac{a+b}{c^2} = \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 10Rr) + r^2(4R+r)(2R+r)}{8pR^2r^2}.$$

$$\text{b) } \frac{b+c}{a^5} + \frac{c+a}{b^5} + \frac{a+b}{c^5} \geq \frac{2}{3R^4}.$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

$$3.9. \text{ a) } \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \right)^2 \geq \frac{108}{5p^2 - 3r^2 - 12Rr}.$$

$$\text{b) } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a+b+c} \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \right) \geq 2\sqrt{3}.$$

Nguyen Viet Hung, Hanoi, Vietnam

$$\text{c) } \left(\frac{1}{m_a + m_b} + \frac{1}{m_b + m_c} + \frac{1}{m_c + m_a} \right)^2 \geq \frac{36}{7p^2 - 5r^2 - 20Rr}.$$

$$d) \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} \left(\frac{1}{m_a + m_b} + \frac{1}{m_b + m_c} + \frac{1}{m_c + m_a} \right) \geq \sqrt{3}.$$

$$e) \left(\sum \frac{1}{m_a + \lambda m_b} \right)^2 \geq \frac{108}{(5\lambda^2 + 11\lambda + 5)p^2 - (3\lambda^2 + 9\lambda + 3)r^2 - (12\lambda^2 + 36\lambda + 12)Rr},$$

unde $\lambda \geq 0$.

$$f) \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} \left(\frac{1}{m_a + \lambda m_b} + \frac{1}{m_b + \lambda m_c} + \frac{1}{m_c + \lambda m_a} \right) \geq \frac{2\sqrt{3}}{1 + \lambda}, \text{ unde } \lambda \geq 0.$$

$$3.10. a) \sum \sqrt{\cos A \sin B \sin C} \leq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ în triunghiul ascuțitunghic.}$$

George Apostolopoulos, Messolonghi, Grecia

$$b) \sum \sqrt{\sin A \cos B \cos C} \leq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

$$3.11. a) \frac{m_a}{m_b} + \frac{m_b}{m_c} + \frac{m_c}{m_a} \geq \frac{3\sum a^2}{2\sum a^2 + \sum bc} + 2.$$

Adil Abdullayev, Baku, Azerbaidjan

$$b) \frac{m_a}{m_b + m_c} + \frac{m_b}{m_c + m_a} + \frac{m_c}{m_a + m_b} \geq \frac{3\sum a^2}{4\sum a^2 + 2\sum bc} + 1.$$

$$c) \frac{m_a}{m_b + \lambda m_c} + \frac{m_b}{m_c + \lambda m_a} + \frac{m_c}{m_a + \lambda m_b} \geq \frac{1}{\lambda + 1} \left(\frac{3\sum a^2}{2\sum a^2 + \sum bc} + 2 \right), \text{ unde } \lambda \geq 0.$$

$$3.12. a) \frac{r_a^3}{r_b} + \frac{r_b^3}{r_c} + \frac{r_c^3}{r_a} \geq \frac{(4R + r)^2 (R - r)}{2R - r}. \quad \text{Adil Abdullayev, Baku, Azerbaidjan}$$

$$b) \frac{r_a^3}{r_b + r_c} + \frac{r_b^3}{r_c + r_a} + \frac{r_c^3}{r_a + r_b} \geq \frac{(4R + r)^2 (R - r)}{2(2R - r)}.$$

$$c) \frac{r_a^3}{r_b + \lambda r_c} + \frac{r_b^3}{r_c + \lambda r_a} + \frac{r_c^3}{r_a + \lambda r_b} \geq \frac{1}{\lambda + 1} \cdot \frac{(4R + r)^2 (R - r)}{2R - r}, \text{ unde } \lambda \geq 0.$$

$$d) \frac{h_a^3}{h_b} + \frac{h_b^3}{h_c} + \frac{h_c^3}{h_a} \geq \left(\frac{2r}{R} \right)^2 (9R^2 - 5Rr + r^2).$$

$$e) \frac{h_a^3}{h_b + h_c} + \frac{h_b^3}{h_c + h_a} + \frac{h_c^3}{h_a + h_b} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{R} \right)^2 (9R^2 - 5Rr + r^2).$$

$$f) \frac{h_a^3}{h_b + \lambda h_c} + \frac{h_b^3}{h_c + \lambda h_a} + \frac{h_c^3}{h_a + \lambda h_b} \geq \frac{1}{\lambda + 1} \left(\frac{2r}{R} \right)^2 (9R^2 - 5Rr + r^2), \text{ unde } \lambda \geq 0.$$